ΘΕΜΑ 1 (GI_A_ALG_2_485)

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

iii. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε,

$$\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad (1)$$

ii. Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση όταν

$$\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$$

η οποία είναι η

$$x = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} = \lambda + 1$$

iii. Για να είναι ταυτότητα η παραπάνω εξίσωση πρέπει

$$\lambda - 1 = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ (\lambda - 1 = 0 \ \ \acute{\eta} \ \ \lambda + 1 = 0)$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ (\lambda = 1 \ \ \acute{\eta} \ \ \lambda = -1) \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Άρα, $\lambda = 1$.

ΘΕΜΑ 2 (GI_A_ALG_2_507)

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

i. Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

ii. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

iii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

ΛΥΣΗ

i. Για $\lambda = 0$ η (1) γίνεται:

$$-9x = 0$$

Για $\lambda = 1$ η (1) γίνεται:

$$-8x = -2$$

Για $\lambda = 2$ η (1) γίνεται:

$$-5x = -2$$

ii. Για να έχει η εξίσωση (1) μία και μοναδική λύση πρέπει:

$$\lambda^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 3 \neq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda + 3 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda \neq 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda \neq -3$$

iii. Αφού η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την $x = 4$ (για $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$) τότε την επαληθεύει δηλαδή:

$$(\lambda^2 - 9)4 = \lambda^2 - 3\lambda \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 3\lambda$$
$$\Leftrightarrow 3\lambda^2 + 3\lambda - 36 = 0 \xLeftrightarrow{\delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \acute{o}\rho o\ \mu\varepsilon\ 3} \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

Υπολογίζουμε την διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 48 = 49 > 0$$

οπότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+7}{2} = 3 \\ \dfrac{-1-7}{2} = -4 \end{cases}$$

Η $\lambda = 3$ απορρίπτεται οπότε η (1) έχει μοναδική λύση την $x = 4$ για $\lambda = -4$.

ΘΕΜΑ 3 (GI_A_ALG_2_1055)

i. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

iii. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ

i. Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$0x = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 0x = 6$$

η οποία είναι αδύνατη.

Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γίνεται:

$$0x = 0$$

η οποία είναι ταυτότητα.

ii. Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση όταν:

$$(\lambda^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda - 1 \neq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda + 1 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda \neq 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda \neq -1$$

Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{\lambda^2 - 1}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda + 2}{\lambda - 1}$$

ΘΕΜΑ 4 (GI_A_ALG_2_4302)

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. όταν $\alpha = 1$

ii. όταν $\alpha = -3$

b. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

ΛΥΣΗ

a. Έχουμε:

i. Για $\alpha = 1$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

ii. Για $\alpha = -3$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$0x = 0$$

η οποία είναι ταυτότητα.

b. Για να έχει η εξίσωση μοναδική λύση πρέπει:

$$\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$$

Για $\alpha \neq -3$ η μοναδική λύση είναι:

$$(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha^2 - 9}{\alpha + 3}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{(\alpha-3)(\alpha+3)}{\alpha+3}$$
$$\Leftrightarrow x = \alpha - 3$$